

Exercices/Solutions TD Communications Numériques

E1- Calcul d'entropies

On considère un couple de variables aléatoires I et J dépendantes l'une de l'autre. Ces variables peuvent respectivement prendre les valeurs $i \in \{A, B, C\}$ et $j \in \{D, E, F, G\}$.

Démontrer la formule suivante :

$$H(i,j) \leq H(i) + H(j)$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

NB : on peut utiliser la relation $\log_e(x) \leq x-1$.

Solution :

On calcule la différence entre les 2 termes :

$$H(i) + H(j) - H(i,j) \tag{1}$$

$$= -\sum_i p(i) \log(p(i)) - \sum_j p(j) \log(p(j)) + \sum_i \sum_j p(i,j) \log(p(i,j)) \tag{2}$$

$$= -\sum_i \sum_j p(i,j) [\log(p(i)) + \log(p(j)) - \log(p(i,j))] \tag{3}$$

$$= -\sum_i \sum_j p(i,j) \log \frac{p(i)p(j)}{p(i,j)} \tag{4}$$

passage de la ligne (2) à (3) : $p(i) = \sum_j p(i,j)$ et $p(j) = \sum_i p(i,j)$.

On a montré pour l'instant que l'information mutuelle $I(i,j)$ vérifie :

$$H(i) + H(j) - H(i,j) = I(i,j).$$

Il reste à montrer que cette quantité est toujours positive. Pour cela on utilise la propriété de la fonction log suivante :

$$\log(x) \leq x-1$$

pour laquelle l'égalité n'est vérifiée que pour $x = 1$.

$$\begin{aligned} H(i) + H(j) - H(i,j) &= -\sum_i \sum_j p(i,j) \log \frac{p(i)p(j)}{p(i,j)} \\ &\geq -\sum_i \sum_j p(i,j) \left(\frac{p(i)p(j)}{p(i,j)} - 1 \right) \\ &\geq -\sum_i \sum_j p(i,j) + \sum_i \sum_j p(i,j) \\ &\geq -\sum_i p(i) \sum_j p(j) + \sum_i \sum_j p(i,j) \\ &\geq -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

égalité si $p(i)p(j) = p(i,j)$ si les variables i et j sont indépendantes.

E2 - Capacité d'un canal.

On considère le canal dont les alphabets d'entrée et de sortie comportent 5 symboles notés $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ et dont les probabilités de transition sont définies par:

$$\Pr\{Y = i | X = j\} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } i = j \pm 1 \bmod 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

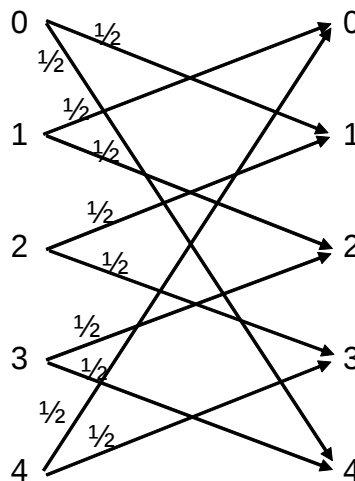
Calculer la capacité de ce canal.

Solution :

On détermine la matrice de transition.

i	j	$(j+1) \bmod 5$	$(j-1) \bmod 5$
0	0	1	4
1	1	2	0
2	2	3	1
3	3	4	2
4	4	0	3

j	0	1	2	3	4
i					
0	0	$1/2$	0	0	$1/2$
1	$1/2$	0	$1/2$	0	0
2	0	$1/2$	0	$1/2$	0
3	0	0	$1/2$	0	$1/2$
4	$1/2$	0	0	$1/2$	0



c.f. exemple cours « canal bruité »

$C = 1$ bit/seconde.

E3 - Codage source

Soit une source qui émet 4 symboles $x_1, \dots, x_4$ et 4 codes $C_1, \dots, C_4$ tels que :

x	$p(x)$	C_1	C_2	C_3	C_4
x_1	0.5	0	0	0	0
x_2	0.25	0	1	10	01
x_3	0.125	1	00	110	011
x_4	0.125	10	11	111	0111

Parmi ces 4 codes lesquels satisfont la condition de préfixe ? Pourquoi ?

Parmi ces 4 codes lesquels sont à décodage unique ? Pourquoi ?

Quel est le plus efficace ?

Définitions :

On dit qu'un code est à décodage unique ssi à toute suite de mots ne correspond qu'un seul message émis.

On dit qu'un code satisfait la condition de préfixe ssi un mot code n'est le début d'aucun autre mot code. Un code satisfaisant la condition de préfixe est aussi à décodage unique.

L'avantage principal d'une telle propriété est un décodage instantané des mots code reçus (sans avoir à attendre le prochain mot code).

Solution :

Le code C_3 satisfait la condition de préfixe car chaque mot code n'est le début d'aucun autre mot code. En revanche, les autres codes ne respectent pas la condition de préfixe.

Les codes C_3 et C_4 sont à décodage unique.

Ce n'est pas le cas pour les codes C_1 et C_2 : en effet, considérons le code C_1 , si on reçoit la suite de mot code 001, on ne sait pas si le message original est $x_1x_1x_3$ ou $x_1x_2x_3$ ou $x_2x_1x_3$ ou encore $x_2x_2x_3$: le décodage n'est pas unique.

E4 - Codage source

On considère une source binaire Markovienne de mémoire 1, caractérisée par les probabilités de transitions suivantes :

$$p(x_i = 0 | x_{i-1} = 0) = 7/8$$

$$p(x_i = 1 | x_{i-1} = 0) = 1/8$$

$$p(x_i = 1 | x_{i-1} = 1) = 3/4$$

$$p(x_i = 0 | x_{i-1} = 1) = 1/4$$

- 1- Calculer les probabilités d'apparition des symboles 0 et 1 en régime stationnaire, l'entropie de cette source (si l'on ne tient pas compte de l'interaction entre symboles successifs).
- 2- Dans cet exercice, on va appliquer plusieurs stratégies pour coder cette source. Dans chaque cas, établir les bornes théoriques sur la longueur moyenne par symbole du code obtenu, réaliser ce code et calculer la longueur moyenne attendue.
- 3- Finalement coder le flux de source suivant :
000011100000011...

Méthodes à considérer :

(a) codage de Fano sur les symboles de la source 1 par 1.

(b) codage de Huffman sur les symboles de la source 1 par 1.

(c) codage de Fano sur les symboles de la source 3 par 3.

NB : pour calculer la probabilité d'apparition de chacun des 8 triplets possibles de symboles, on utilise les probabilités conditionnelles.

(d) codage de Huffman sur les symboles de la source 3 par 3.

Solution :

1- Calcul des probabilités d'apparition des symboles 0 et 1 : pour cela on a :

$$p(x_i = 0) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}} p(x_i = 0 | x_{i-1} = \alpha) \times p(x_{i-1} = \alpha)$$

$$p(x_i = 1) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}} p(x_i = 1 | x_{i-1} = \alpha) \times p(x_{i-1} = \alpha)$$

En régime stationnaire on a de plus :

$$p(x_i = 0) = p(x_{i-1} = 0) \text{ et } p(x_i = 1) = p(x_{i-1} = 1).$$

On notera ces probabilités $p(0)$ et $p(1)$.

En regroupant ces équations et en simplifiant également les notations pour les probabilités conditionnelles on obtient :

$$p(0) = p(0|0) \times p(0) + p(0|1) \times p(1) = \frac{7}{8} p(0) + \frac{1}{4} p(1).$$

$$p(1) = p(1|0) \times p(0) + p(1|1) \times p(1) = \frac{1}{8} p(0) + \frac{3}{4} p(1).$$

Ce qui se simplifie en $p(0) = 2 p(1)$.

On a par ailleurs $p(0) + p(1) = 1$,

d'où :

$$p(0) = \frac{2}{3} \text{ et } p(1) = \frac{1}{3}$$

L'entropie de cette source (en bits par symboles) : si l'on ne tient pas compte de l'interaction entre symboles successifs se calcule directement à partir de ces probabilités stationnaires :

$$H(X) = - \sum_{\alpha \in \{0,1\}} p(\alpha) \log_2(p(\alpha))$$

$$H(X) = -\frac{2}{3} \log_2\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} \log_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0.9183 \text{ bits/symboles.}$$

2 (a) et (b) - **Codage des symboles de la source 1 par 1**, en ignorant volontairement l'interaction entre symboles. Les bornes théoriques sur la longueur moyenne attendue $\bar{n}$ utilisent l'entropie $H(X)$ calculée précédemment. On a :

$$H(X) \leq \bar{n} < H(X) + 1$$

$$0.9183 \leq \bar{n} < 1.9183$$

En pratique, comme il n'y a que 2 symboles de source, tant le code de Huffman que le code de Fano triviaux : $C(0) = 0$ et $C(1) = 1$.

Coder le flux de source donné en exemple consiste simplement à le recopier :

$$C(0000111100000011) = 0000111100000011.$$

2 (c) et (d) - **Codage des symboles de la source 3 par 3**

Pour calculer les probabilités d'apparition de chacun des 8 triplets possibles de symboles, on utilise les probabilités conditionnelles :

$$p(x_{i-2}x_{i-1}x_i) = p(x_{i-2}) p(x_{i-1}|x_{i-2}) p(x_i|x_{i-1}).$$

En pratique cela donne les 8 triplets possibles :

$$p(000) = \frac{2}{3} \frac{7}{8} \frac{7}{8} = \frac{49}{96}$$

$$p(001) = \frac{2}{3} \frac{7}{8} \frac{1}{8} = \frac{7}{96}$$

$$p(010) = \frac{2}{3} \frac{1}{8} \frac{1}{4} = \frac{2}{96}$$

$$p(011) = \frac{2}{3} \frac{1}{8} \frac{3}{4} = \frac{6}{96}$$

$$p(100) = \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{7}{8} = \frac{7}{96}$$

$$p(101) = \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{8} = \frac{1}{96}$$

$$p(110) = \frac{1}{3} \frac{3}{4} \frac{1}{4} = \frac{6}{96}$$

$$p(111) = \frac{1}{3} \frac{3}{4} \frac{3}{4} = \frac{18}{96}$$

Calcul de l'entropie associée à ces triplets :

$$H(X^3) = - \sum_{x_0 x_1 x_2 = 000} p(x_0 x_1 x_2) \log_2(p(x_0 x_1 x_2)) = 2.1839 \text{ bits/triplets.}$$

Bornes théoriques pour $\bar{n}$:

$$\frac{H(X^3)}{3} \leq \bar{n} < \frac{H(X^3)+1}{3}$$

$$0.7280 \leq \bar{n} < 1.0613 \text{ bits/symbole.}$$

Algorithme de Fano :

x	$p(x)$						$C(x)$	n_x
000	49/96	49	}	}	}	}	0	1
111	18/96	18					100	3
001	7/96	7					101	3
100	7/96	7					1100	4
011	6/96	6	}	}	}	}	1101	4
110	6/96	6					1110	4
010	2/96	2					11110	5
101	1/96	1					11111	5

Et on a donc une longueur moyenne attendue par triplet de symboles

$$\bar{n}_3 = \sum_{x=000}^{111} p(x) \cdot n_x = 2.2396 \text{ bits/triplet}$$

et donc une longueur moyenne par symbole de

$$\bar{n} = \frac{\bar{n}_3}{3} = 0.7465 \text{ bits/symbole}$$

Pour coder 000011100000011..., on doit le diviser en triplets puis appliquer le code ci-dessus.

$$\begin{aligned}
 C(000011100000011...) &= C(000), C(011), C(100), C(000), C(011), ... \\
 &= 0, 1101, 1100, 0, 1101, ... \\
 &= 01101110001101...
 \end{aligned}$$

Algorithme de Huffman :

x	$p(x)$						$C(x)$	n_x
000	49/96					0	0	1
111	18/96					1	10	2
001	7/96					1	1110	4
100	7/96					1	1100	4
011	6/96					1	1101	4
110	6/96					1	11110	5
010	2/96					1	111110	6
101	1/96					1	111111	6

On trouve une longueur moyenne attendue par triplets de

$$\bar{n}_3 = \sum_{x=000}^{111} p(x) \cdot n_x = 2.2188 \text{ bits/triplet}$$

et donc une longueur moyenne par symbole de

$$\bar{n} = \frac{\bar{n}_3}{3} = 0.7396 \text{ bits/symbole}$$

ce qui est légèrement mieux que le code de Fano. Pour coder 000011100000011..., on doit le diviser en triplets puis appliquer le code ci-dessus. On trouve

$$\begin{aligned} C(000011100000011...) &= C(000), C(011), C(100), C(000), C(011), \dots \\ &= 0, 1101, 1100, 0, 1101, \dots \\ &= 01101110001101\dots \end{aligned}$$

Remarque :

Il existe d'autres variantes de ces codes de Fano et Huffman possibles, selon la convention que l'on choisit pour ordonner les symboles de même probabilité, et pour attribuer la valeur 0 ou 1 aux embranchements de l'arbre. Cependant, tous ces codes auront la même longueur moyenne attendue.

E5 - Codage Source

Soit une source qui émet 8 symboles indépendants $x_1, x_2, \dots, x_8$ avec les probabilités :
 $p(x_1) = 0.4$; $p(x_2) = p(x_3) = 0.15$; $p(x_4) = p(x_5) = 0.1$; $p(x_6) = 0.06$;
 $p(x_7) = p(x_8) = 0.02$.

- (a) Construire le code de Fano pour cette source. Calculer l'efficacité du code.
- (b) Construire le code de Huffman pour cette source. Calculer l'efficacité du code.
- (c) Comment comparer les deux codes ?
- (d) Dans chaque cas n'y-a-t-il qu'une seule manière de construire le code ?

NB : on calcule l'efficacité d'un code avec : $\eta = \frac{H(x)}{\bar{n}}$ où $H(x)$ désigne l'entropie de la source et $\bar{n}$ la longueur moyenne du code, calculée avec $\bar{n} = \sum_k p(x_k) \cdot n_x$.

Solution :

(a) et (b) résultats du codage :

x	$p(x)$	Fano	Huffman
x_1	0.4	00	0
x_2	0.15	01	001
x_3	0.15	100	011
x_4	0.1	101	111

x_5	0.1	110	0101
x_6	0.06	1110	01111
x_7	0.02	11110	011111
x_8	0.02	11111	111111

(c) Le calcul d'entropie se fait selon : $H(x) = -\sum_k p(x_k) \log(p(x_k))$.

Calcul des caractéristiques de ce code :

Fano : $\bar{n} = 2.59$ $\eta = 95.8\%$

Huffman : $\bar{n} = 2.54$ $\eta = 97.7\%$ code à plus forte efficacité

donc le meilleur en absence de bruit.

(d) plusieurs symboles avec la même probabilité donc plusieurs possibilités pour ce codage.

E6 - Codes détecteurs/correcteurs d'erreurs

On considère le code linéaire dont la matrice génératrice est :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Lister tous les mots code de ce code.
- (2) Quelle est la capacité de détection, de correction et de détection/correction de ce code ?
- (3) Quelle est la matrice de parité ?
- (4) On veut transmettre le message 011 mais il y a une erreur de transmission sur le 5^e bit. Quel message reçoit-on ? Comment peut-on corriger cette erreur ?
- (5) On veut étendre ce code en y adjoignant un bit de parité. Que deviennent la matrice génératrice / les mots code / la matrice de parité / la capacité détectrice/correctrice du code ? Quelle est la redondance de ce code ?

Solution :

(1)

On considère le code linéaire dont la matrice génératrice est

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est un code de type $n = 6, m = 3$.

Pour lister tous les mots codes, il suffit de calculer $y = x.G$ pour tous les messages x possible. Comme les messages sont des mots de $m = 3$ bits, on a $x \in \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$. Dès lors, on trouve $y \in \{000000, 001110, 010101, 011011, 100011, 101101, 110110, 111000\}$.

(2)

Ce code a une distance de Hamming $d = 3$. Il permet donc de détecter 2 erreurs ou d'en corriger 1.

(3)

La matrice de parité se trouve aisément en tenant compte de la structure $G = [I_m A]$, et donc

$$H = [A^T I_k] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que $H.G^T = 0$.

(4)

Si on veut transmettre le message 011, on obtient le mot code 011.G = 011011, soit la somme des deux dernières lignes de G . Une erreur de transmission sur le 5ème bit donne un message corrompu 011001. Pour corriger cette erreur, on calcule le syndrome $s = 011001.H^T = 010$, qui correspond à la 5ème colonne de la matrice de parité. L'erreur est donc bien sur le 5ème bit.

(5)

Si on étend ce code en y adjoignant un bit de parité, il suffit d'étendre chaque ligne de la matrice de parité avec un bit de parité. On trouve

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les mots codes sont {0000000, 0011101, 0101011, 0110110, 1000111, 1011010, 1101100, 1110001}.

La distance de Hamming est $d = 4$, et ce code permet donc soit de détecter 3 erreurs, soit d'en corriger 1 et détecter une deuxième. La matrice de parité se construit comme précédemment en notant que $G = [I_m A]$, mais maintenant A est une matrice avec $k = 4$ lignes et $m = 3$ colonnes, et donc

$$H = [A^T I_k] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La redondance de ce code est $n/m = 7/3$.

E7 - Codage en bloc

Soit le code bloc dont les bits de parité sont définis par les équations suivantes :

$$p_1 = m_1 + m_2 + m_4$$

$$p_2 = m_1 + m_3 + m_4$$

$$p_3 = m_2 + m_3 + m_4$$

avec m_i représentant les bits d'information.

Le mot code sera transmis sous la forme $[p_1 \ p_2 \ m_1 \ p_3 \ m_2 \ m_3 \ m_4]$

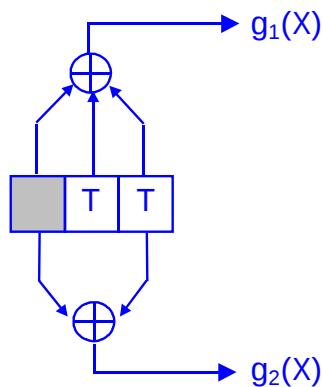
Déterminer :

- (a) la matrice de parité de ce code.
 (b) la matrice génératrice de ce code.

Solution :

matrice de parité :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E8 - Codage convolutifOn considère le codeur de caractéristiques : $K = 3$, $r = \frac{1}{2}$ de la figure suivante :

Ce codeur est utilisé sur un canal binaire symétrique. On suppose que l'état initial est 00. A la sortie du canal, la séquence reçue est la suivante : $Z = (11000010110000)$.

Déterminer le chemin le plus probable dans le treillis et déterminer les 5 premiers bits d'information.

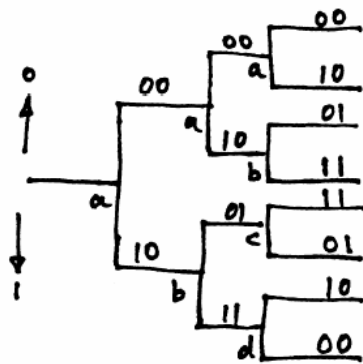
Solution :

Les polynômes correspondant à ce codeur sont les suivants :

$$g_1(X) = 1 + X + X^2$$

$$g_2(X) = 1 + X^2.$$

arbre :



treillis

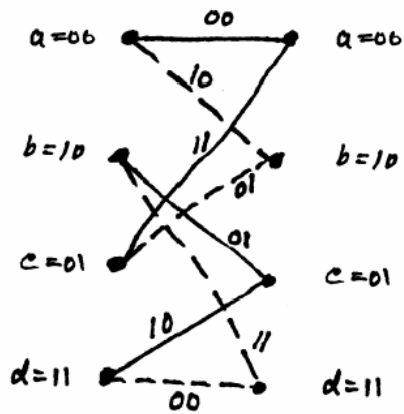
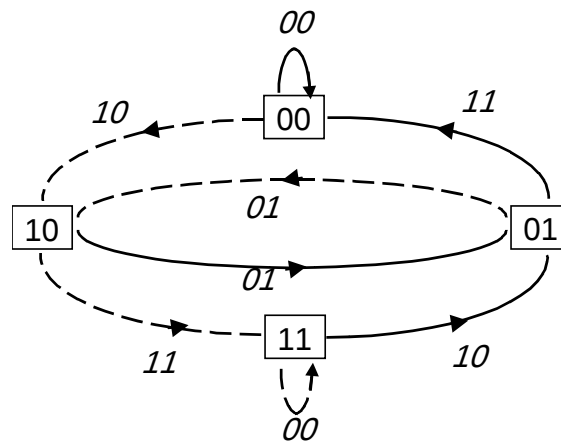
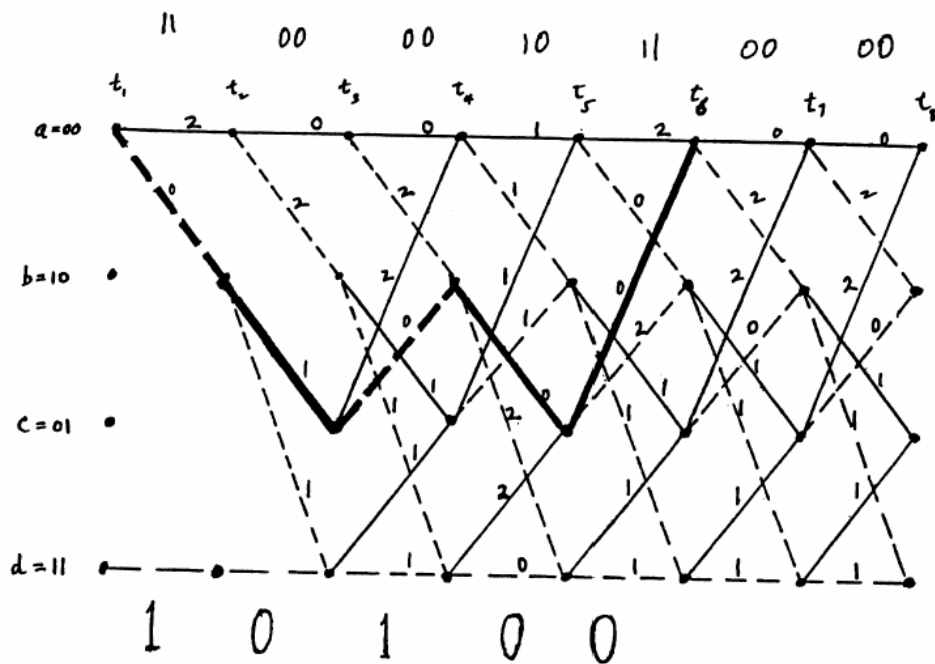


diagramme d'état :



Algorithme de décodage.



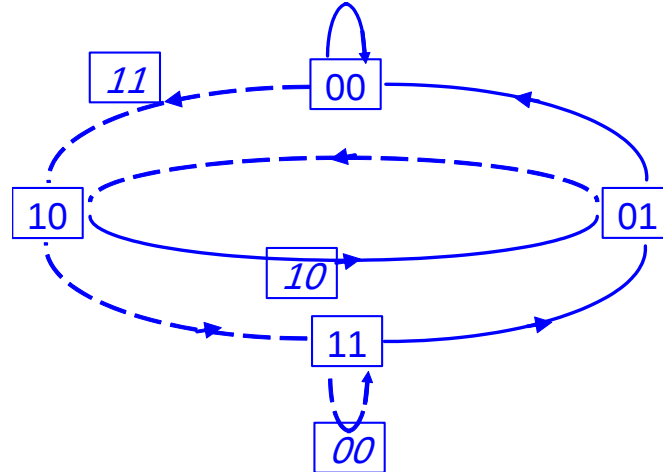
Le message reçu : $\underline{m} = 10100$ aurait dû être encodé en tant que :

$\underline{U} = 11\ 10\ 00\ 10\ 11$, alors que la séquence à décoder était $\underline{Z} = 11\ \underline{00}\ 00\ 10\ 11$.

Le 3^{ème} bit était donc erroné.

E9 - Codage convolutif

Soit le codeur convolutif, de longueur de contrainte $K=3$, de taux $r=1/2$, et dont le diagramme d'état partiel est représenté sur la figure suivante :



Déterminer complètement ce codeur (polynômes générateurs) et compléter ce diagramme d'état.

Solution :

Deux polynômes à déterminer :

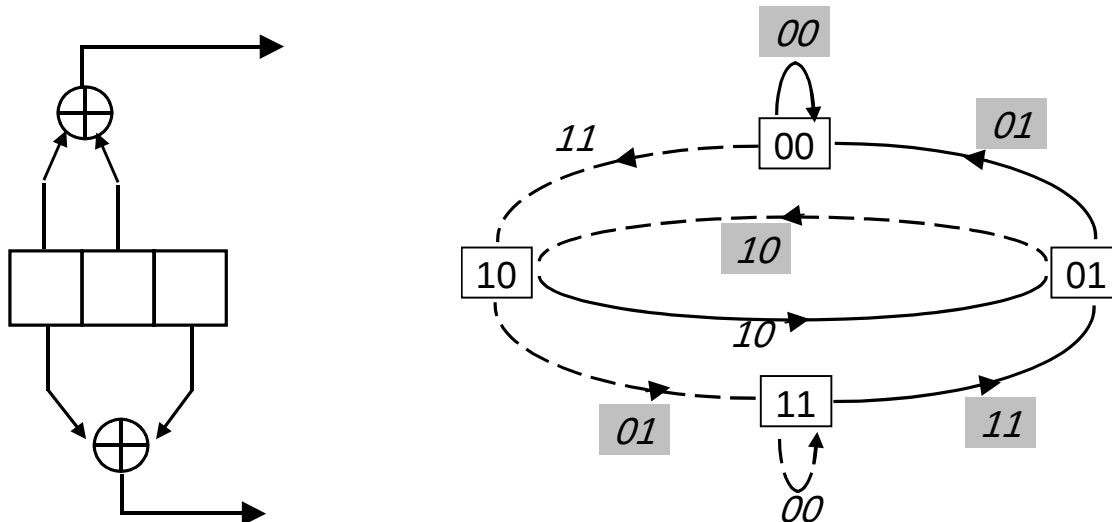
- $g_1(X)$ et les coefficients g_1^0, g_1^1, g_1^2
- $g_2(X)$ et les coefficients g_2^0, g_2^1 et g_2^2 .

En considérant la transition $00 \rightarrow 10$, le mot codé est 11, donc $g_1^0 = g_2^0 = 1$.

En considérant la transition $1X \rightarrow 01$, le mot codé est 10, donc $g_1^1 = 1$ et $g_2^1 = 0$.

En considérant la transition $11 \rightarrow 11$, le mot codé est 00, donc $g_1^2 = 0$ et $g_2^2 = 1$.

Donc $g_1(X) = 1 + X$ et $g_2(X) = 1 + X^2$.



E10 - ISI et filtrage adapté

Quelle est la largeur de bande minimale théorique nécessaire à une communication avec un taux de transmission de 10Mbits/s et pour un signal 16-niveaux PAM sans ISI ?

Quel facteur de roll-off doit avoir le filtre si la largeur de bande permise est de 1.375MHz ?

Solution :

Le taux de transmission vaut $R_b = 10\text{Mbit/s}$.

Il s'agit d'une PAM 16 niveaux : $M=2^K$ soit $K = \log_2(M) = \log_2(16) = 4$.

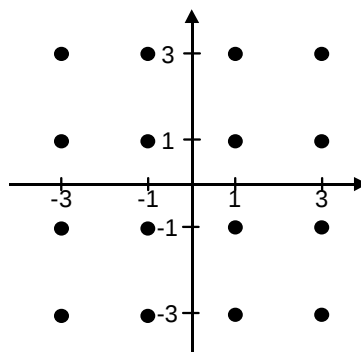
Le taux symbole s'écrit alors : $R_s = \frac{R_b}{\log_2(M)} = \frac{10\text{ Mbit / s}}{16} = 2.5\text{Msymbol/s}$.

Si pas d'ISI, la largeur de Bande de Nyquist est donnée par : $NB_W = \frac{R_s}{2} = 1.25\text{MHz}$.

Si on change de largeur de bande soit W , alors $W = \frac{1}{2} (1+r)R_s$ où r désigne le roll-off. On trouve alors $r=0.1$.

E11 - Modulations numériques

Pour une ligne de téléphone, avec une modulation 16-QAM rectangulaire, avec une porteuse à 1800Hz, un taux de transmission symbole de $R=2400\text{Hz}$ et un taux binaire de 9600b/s.

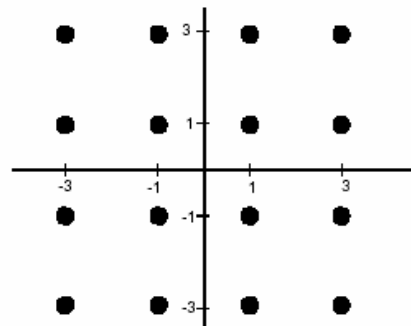


Trouver :

- (1) la bande de fréquence utilisée pour un filtrage idéal de Nyquist
- (2) La bande de fréquence utilisée pour un filtrage RC, avec $\alpha = 0.3$ (largeur de bande en excès).

Solution :

La configuration 16 QAM rectangulaire à la forme suivante dans l'espace I/Q.



Nous avons un taux de transmission binaire de $R=9600$ Hz, et un taux de transmission de symbole de $R_s=2400$ Hz. La largeur de bande donc pour un filtrage idéal Nyquist est 2400 Hz. La porteuse est à 1800 Hz, donc la plage de fréquence est 600 Hz jusqu'à 3000 Hz.

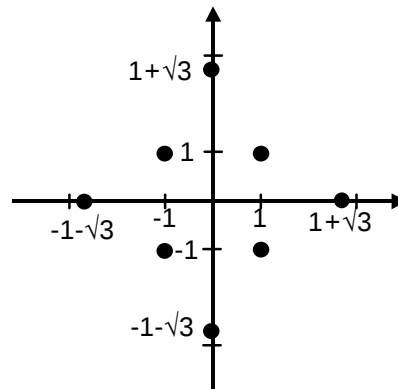
La largeur de bande donc pour un filtrage idéal RC, $\alpha=.3$ (largeur de bande en excès) est $2400 \cdot 1.3 = 3120$ Hz. La porteuse est à 1800 Hz, donc la plage de fréquence est

$$1800 - \frac{3120}{2} : 1800 + \frac{3120}{2}$$

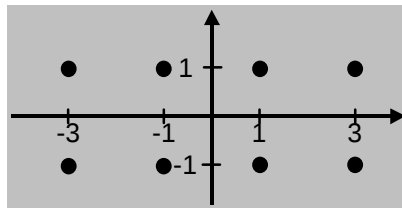
$$240 : 3360$$

E12 - Modulations numériques

On considère la constellation 8QAM donnée dans la figure suivante :



- (1) Quelles sont les coordonnées des symboles (dans l'espace du signal) quand tous les symboles ont la même probabilité ?
- (2) Trouver la probabilité d'erreur en utilisant l'approximation venant de la borne d'union.
- (3) Est-ce que cette configuration a une meilleure probabilité d'erreur que la constellation suivante ? pourquoi ?

**Solution :**

(1)

Pour chercher les coordonnées dans l'espace de signal, nous utilisons la suivante :

$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{ME_s}{\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]}} (a_n^I, a_n^Q)$$

Pour calculer la somme, nous utilisons les observations suivantes :

(a_n^I, a_n^Q)	# de points	distance ² de l'origine	Sous-total
$(\pm 1, \pm 1)$	4	2	8
$(0, \pm 1 \pm \sqrt{3})$ $(\pm 1 \pm \sqrt{3}, 0)$	4	$4 + 2\sqrt{3}$	$16 + 8\sqrt{3}$
$\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]$			$24 + 8\sqrt{3} = 37.86$

Donc les coordonnées sont :

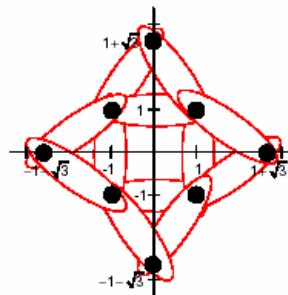
$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{8E_s}{24 + 8\sqrt{3}}} (a_n^I, a_n^Q) = \sqrt{\frac{E_s}{3 + \sqrt{3}}} (a_n^I, a_n^Q) = \sqrt{\frac{E_s}{4.73}} (a_n^I, a_n^Q)$$

(2)

La distance minimale est $D_{\min} = 2\sqrt{\frac{E_s}{3 + \sqrt{3}}}$ ou

$$d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}} = 2\sqrt{\frac{\log_2 8 \cdot E_b}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2E_b}} = \sqrt{\frac{6}{3 + \sqrt{3}}} = \sqrt{1.27}$$

Pour trouver le nombre de paires de voisins à la distance minimale il faut réaliser que les points $(0, 1 + \sqrt{3})$ et $(1, 1)$ sont à la même distance que entre $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Donc les $K=12$ paires sont :

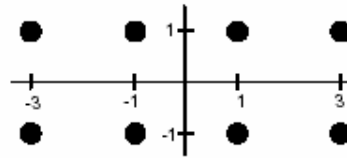


La probabilité d'erreur est donc approximée par :

$$8\text{QAM: } P_e \approx \frac{2 \cdot 12}{8} Q\left(\sqrt{\frac{6}{3 + \sqrt{3}} \frac{E_b}{N_0}}\right) = 3Q\left(\sqrt{1.27 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

(3)

Pour la constellation rectangulaire 8PSK, nous avons



Pour chercher les coordonnées dans l'espace de signal, nous calculons :

(a_n^I, a_n^Q)	# de points	$distance^2$ de l'origine	Sous-total
$(\pm 1, \pm 1)$	4	2	8
$(\pm 1, \pm 3)$	4	10	40
$\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]$			48

Donc les coordonnées sont :

$$(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{8E_s}{48}} (a_n^I, a_n^Q) = \sqrt{\frac{E_s}{6}} (a_n^I, a_n^Q)$$

et la distance minimale est :

$$D_{\min} = 2\sqrt{E_s/6} \quad \text{ou} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}} = 2\sqrt{\frac{\log_2 8 \cdot E_b}{6} \cdot \frac{1}{2E_b}} = \sqrt{\frac{12}{12}} = 1$$

Asymptotiquement, il y a une perte de :

$$10\log_{10} \frac{1}{1.27} = -1 \text{ dB}$$

Donc la première constellation a une meilleure performance.

E13 - Modulations numériques

Si le critère de performance principal d'un système est la probabilité d'erreur bit, lequel de ces 2 schémas de modulation serait choisi pour un canal AWGN ? Pourquoi ?

(a) FSK non cohérent avec $E_b/N_0 = 13\text{dB}$.

(b) PSK cohérent avec $E_b/N_0 = 8\text{dB}$.

Solution :

$$\frac{E_b}{N_0} = 13\text{dB} \Rightarrow 10^{1.3} = 19.95$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 8\text{dB} \Rightarrow 10^8 = 6.31$$

$$\text{FSK non-cohérent} \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} \frac{E_b}{N_0}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{19.95}{2}} = 2.3 \times 10^{-5}$$

$$\text{PSK cohérent} \quad P_e = \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) = Q\left(\sqrt{2 \times 6.31}\right) = 1.9 \times 10^{-4}$$

Le schéma FSK non-cohérent est le plus adapté dans cette situation.

Remarque :

Erreur possible pour cette application : utiliser $20 \log_{10}$.

Problèmes Communications Numériques

P1 - Transmission

Soit un canal téléphonique de bande passante (en Hertz) $B_c = [300, 3000]$. On désire transmettre au débit binaire $D_b = 9600$ bits/s à l'aide d'une modulation MAQ. Quelle modulation choisir ?

Solution :

Le débit maximal de cette bande est $3000 - 300 = 2700$ symboles/secondes en [bauds], donc il suffit d'avoir une modulation avec 2 bits/symbole pour avoir $2 \times 2700 = 5400$ bits/second $\Rightarrow$ MAQ avec 4 symboles $[1+j, 1-j, -1+j, -1-j]$.

P2 – Codage source et transmission

On considère la source discrète $S = \{A, B, C\}$, où les symboles A, B et C sont statistiquement indépendants et possèdent les probabilités suivantes :

$$\Pr(A) = 0.9 ; \Pr(B) = 0.02 ; \Pr(C) = 0.08.$$

La source émet à un taux $R_s = 2000$ symboles/seconde. Les symboles sont codés par un code de Huffman.

1. Calculer le taux de transmission bit R_B .
2. Le code de Huffman utilise maintenant les symboles regroupés par paires. Calculer le nouveau taux de transmission bit R_B .

NB : Pour chaque question, après avoir effectué le codage de Huffman de cette source, on pourra calculer la longueur moyenne $\bar{n}$ en termes de bits/symbole, et en déduire le taux de transmission bit R_B en termes de bits/seconde.

Solution :

1. Pour évaluer le taux de transmission bit R_B , on doit déterminer le nombre de bits par symbole.

Il faut effectuer le codage de Huffman, et calculer le nombre moyen de bits par symbole $\bar{n}$.

Le codage de Huffman fournit :

Symbole(X_i)	Probabilité $\Pr(X_i)$	Code	Longueur n_i	$n_i \Pr(X_i)$
A	0.9	1	1	0.9
B	0.08	01	2	0.16
C	0.02	00	2	0.04

La longueur moyenne du code :

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^3 n_i \Pr(X_i) = 0.9 + 0.16 + 0.04 = 1.1 [\text{bits/symb}]$$

Pour le bit rate : $R_B = \bar{n} \times R_s = 1.1 \times 2000 = 2200 [\text{bits/sec}]$.

2. Codage de Huffman en regroupant les symboles par paires :

Symbole(X_i)	Probabilité $\Pr(X_i)$	Code	Longueur n_i	$n_i \Pr(X_i)$
AA	$0.9 \times 0.9 = 0.81$	1	1	0.81
AC	$0.9 \times 0.08 = 0.072$	00	2	0.144
AB	0.018	0100	4	0.072
BA	0.018	01011	5	0.09
BC	0.0016	01010011	8	0.0128
BB	0.0004	01010010	8	0.0032
CA	0.072	011	3	0.216
CC	0.0064	010101	6	0.0384
CB	0.0016	0101000	7	0.0112

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^9 n_i \Pr(X_i) = 1.3976 [\text{bits}/2 \text{ symb}] = 0.6988 [\text{bits/symb}]$$

Pour le bit rate : $R_b = \bar{n} \times R_s = 0.6988 \times 2000 = 1397.6 [\text{bits/sec}]$.

P3 - Filtrage adapté.

Soit un système de communication qui envoie un signal en utilisant une modulation binaire (2 états) équiprobable, et en utilisant un filtre rectangulaire. La transmission se fait avec un débit de 5 Mégabit par seconde :

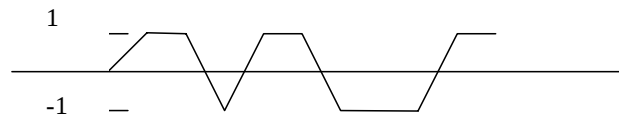
1. Quelle est la longueur du filtre rectangulaire utilisé ?
2. Quelle est la forme du filtre adapté utilisé en réception ?
3. A quoi sert le filtre adapté ?
4. Quelle est la forme du signal à la sortie du filtre adapté avant échantillonnage ?
5. Quel est l'instant idéal d'échantillonnage ?
6. Soit la trame d'information à transmettre : $\{1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1\}$.

Dessiner le signal à transmettre après passage par le filtre rectangulaire. Dessiner approximativement la sortie du filtre adapté du côté du récepteur. Préciser les instants idéaux d'échantillonnage.

7. Supposons que l'horloge à la réception soit décalée de celle à l'émission de $\alpha\%$, de la longueur T du filtre d'émission rectangulaire, quelle est la puissance du signal après l'échantillonnage en fonction de α (on peut commencer à raisonner à partir de $\alpha = 50\%$).

Solution :

1. $T = 1/5 = 0,2$ microseconde.
2. la même : rectangulaire.
3. maximiser le rapport signal à bruit blanc gaussien.
4. si on se limite à un seul échantillon transmis, à la sortie du filtre adapté on aura une forme triangulaire de durée $2T$ dont le sommet est à $t = T$.
5. $t = T$.
- 6.

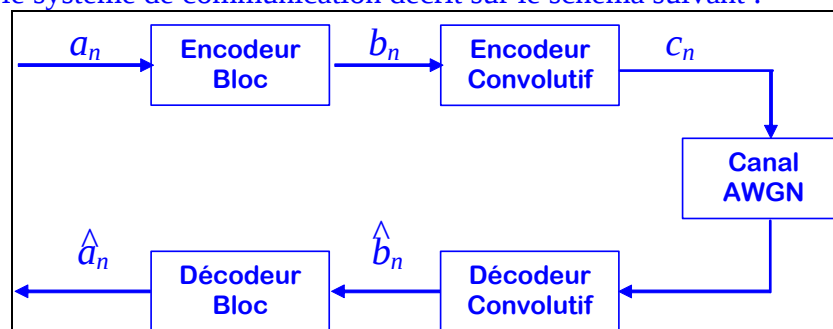


7. Il faut calculer le niveau du signal à la sortie après échantillonnage en fonction de l'erreur de l'horloge d'échantillonnage i. e :

- si $\alpha = 0 \Rightarrow$ pas d'erreur, la sortie = 1 ou -1,
- $\alpha = 50\% \Rightarrow$ la sortie prend les valeurs suivantes 1 (passage de 1 vers 1), -1 (passage de -1 vers -1), 0 (passage de 1 vers -1 et de -1 vers 1) avec les probabilités suivantes $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, la puissance moyenne à la sortie est égale alors à $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
- Le même raisonnement se tient pour les autres valeurs de α : (en supposant que $T = 1$) :
 - Passage de 1 vers 1 $\Rightarrow$ sortie = 1 $\Rightarrow$ puissance = 1 ; probabilité = $\frac{1}{4}$.
 - Passage de -1 vers -1 $\Rightarrow$ sortie = -1 $\Rightarrow$ puissance = 1 ; probabilité = $\frac{1}{4}$.
 - Passage de 1 vers -1 $\Rightarrow$ sortie = $\alpha/2 \Rightarrow$ puissance = $\alpha^2/2$; probabilité = $1/4$.
 - Passage de -1 vers 1 $\Rightarrow$ sortie = $-\alpha/2 \Rightarrow$ puissance = $\alpha^2/2$; probabilité = $1/4$.

P4 – Système de communication

On considère le système de communication décrit sur le schéma suivant :



Les bits $a_n \in \{0,1\}$ sont encodés par un code bloc linéaire [5,2] de matrice génératrice G :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les bits $b_n \in \{0,1\}$ en sortie de l'encodeur bloc sont encodés par un code convolutif, dont les paramètres sont $k = 1$, $n = 2$, de longueur de contrainte $L = 2$, et de polynômes générateurs :

$$\mathbf{g}_1 = (11) \text{ et } \mathbf{g}_2 = (10).$$

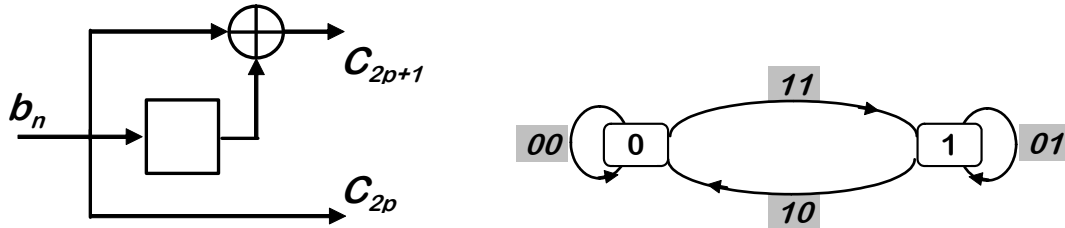
Les 5 bits par mot-code en sortie du code bloc, plus un bit additionnel (tail bit) sont fournis en entrée du code convolutif.

Les bits $c_n \in \{0,1\}$ en sortie du code convolutif sont transmis sur un canal gaussien à bruit additif (canal AWGN), et les bits reçus sont décodés respectivement par le décodeur convolutif, et le code en bloc linéaire.

1. La séquence de 4 bits d'information 0011 est encodée par ce système. Préciser la séquence c_n après codage (après code en bloc linéaire et code convolutif).
2. On suppose recevoir en sortie du canal AWGN la séquence suivante : 101101110111. Préciser la séquence $\hat{a}_n$ estimée correspondant à ces bits reçus.
3. On considère que la concaténation de codes décrite précédemment (code bloc et code convolutif) correspond à un code bloc équivalent, codant 2 bits d'information en mots-code de 12 bits.
Donner la matrice génératrice du code concaténé équivalent.
4. Quel lien existe-t-il entre la distance minimum du code concaténé équivalent, la distance minimum du code [5,2], et la distance libre du code convolutif ?

Solution :

Le code convolutif :



On note $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_5)$ pour désigner le mot de sortie du code bloc [5,2]. Un tail bit (bit à zéro) est ajouté à ce mot avant l'encodage de ces 6 bits par le code convolutif.

La matrice équivalente au code convolutif est :

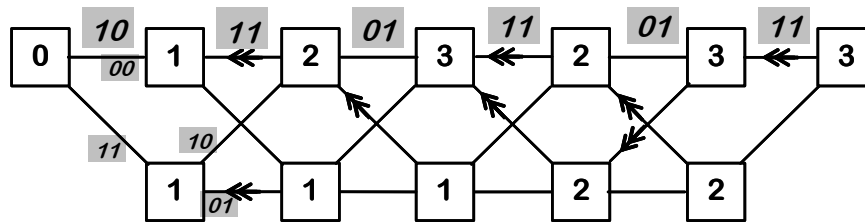
$$G_{conv} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce qui traduit la relation : $\mathbf{c} = \mathbf{b} G_{conv}$, avec $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{12})$ pour désigner la séquence en sortie du code convolutif.

Ainsi, puisque $\mathbf{b} = G_{bloc} \mathbf{a}$, avec $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, alors :

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} G_{bloc} G_{conv} = \mathbf{a} G_{tot}, \text{ avec } G_{tot} = G_{bloc} G_{conv} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Les 4 bits d'information 0011 vont fournir 2x12 bits après codage :
 $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = ((00)G_{tot}, (11)G_{tot}) = (000000000000, 110110110110).$
2. Les 12 bits reçus vont être décodés en 2 étapes : on decode d'abord par l'algorithme de Viterbi, selon le schéma suivant :



ce qui aboutit à la séquence $\hat{b} = (011110)$.

Puis on applique le décodage en bloc : puisque les mots-code sont les suivants :

00000
10100
01111
11011,

Alors on a $\hat{b} = (01111)$ soit $\hat{a} = (01)$.

3. Pour calculer la distance minimum du code total, on utilise les 4 mots code :

000000000000
111011100000
001101010110
110110110110

La distance minimum est 6.

Pour le code convolutif, la distance libre est 3.

Pour le code bloc [5,2] la distance minimale est 2.

La distance minimum du code total est le produit de la distance minimum du code [5,2] par la distance libre du code convolutif.

P5 – Transmission de données :

On considère un système de transmission de données à un taux $R_B = 9600$ bits/seconde, et qui nécessite une probabilité d'erreur bit n'excédant pas $P_B = 10^{-3}$, sur un canal gaussien additif (canal AWGN).

On demande de concevoir le système, en choisissant le schéma de modulation parmi :

- une modulation M-PSK, à détection cohérente.
- une modulation M-FSK orthogonale, à détection non cohérente.

Le système ainsi conçu doit respecter à la fois le taux de transmission et la probabilité d'erreur maximale, tout en maximisant l'efficacité spectrale $\eta = R_s/W_s$, où W_s désigne la largeur de bande.

Expliquer votre choix de modulation dans les situations suivantes :

1. La largeur de bande maximale allouable pour la transmission est $B_w = 5000$ Hz, et le rapport signal-à-bruit disponible en dB est $E_B/N_0 = 12$ dB.
2. $B_w = 40$ kHz.
 $E_B/N_0 = 7$ dB.

NB : Pour choisir le schéma de modulation, on pourra comparer les efficacités spectrales respectives des 2 schémas proposés, en exprimant W_s en fonction de R_B et M , et en simplifiant

l'expression de η .

Puis une fois le schéma de modulation choisi, pour déterminer la valeur de M adéquate, on établira un tableau des valeurs de P_B , W_S et η en fonction des valeurs 2, 4, 8 ou 16 pour M .

Solution :

On rappelle le lien entre taux bit et taux symbole : $R_S = \frac{R_B}{\log_2(M)}$, et celui entre énergie bit et énergie symbole : $E_S = \log_2(M) \times E_B$.

Pour chaque schéma de modulation, on écrit l'expression de la largeur de bande :

$$W_S = \begin{cases} R_S = R_B / \log_2(M) & \text{pour M - PSK} \\ M \times R_S = M \times R_B / \log_2(M) & \text{pour M - FSK} \end{cases}$$

Soit l'expression de l'efficacité spectrale $\eta = \frac{R_B}{W_S} = \begin{cases} \log_2(M) \\ \log_2(M)/M \end{cases}$.

On choisit donc la modulation M-PSK qui a la meilleure efficacité spectrale η .

Pour déterminer la valeur de M , on compare les probabilités d'erreur, et la largeur de bande correspondante :

1.

M	P_B	W_S	η
2	8.9×10^{-9}	9600	1
4	8.9×10^{-9}	4800	2
8	6.3×10^{-5}	3200	3
16	7×10^{-3}	2400	4

On choisit la 8-PSK dans ce cas.

2.

M	P_B	W_S	η
2	8×10^{-4}	9600	1
4	8×10^{-4}	4800	2
8	1.2×10^{-2}	3200	3

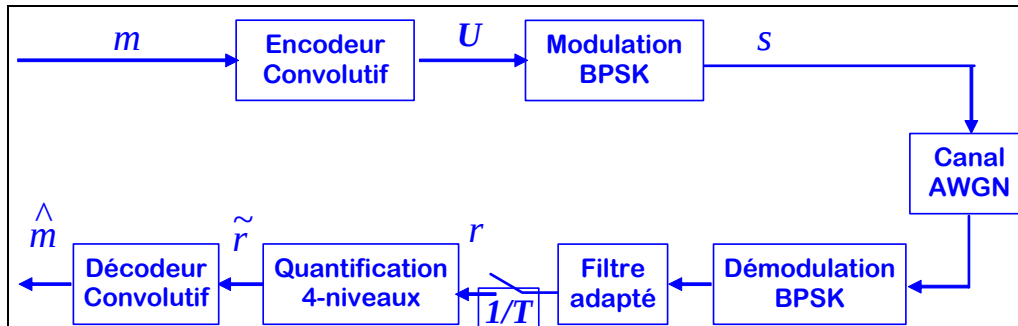
On choisit la Q-PSK dans ce cas.

P6 - Code convolutif

On considère l'encodeur convolutif dont les polynômes générateurs sont:

$$\mathbf{g}_1 = (111) \text{ et } \mathbf{g}_2 = (101),$$

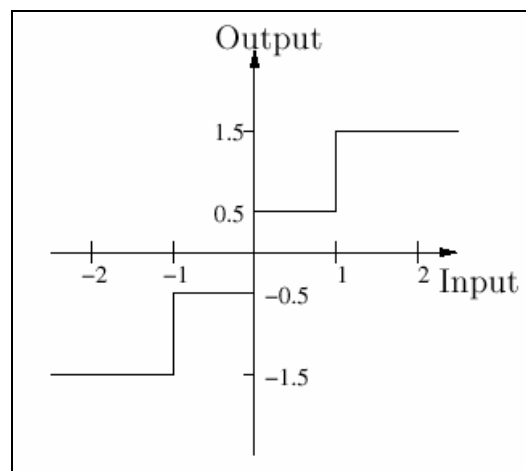
suivi d'une modulation BPSK.



On reçoit la séquence $\mathbf{r}$ suivante: $\mathbf{r} = (-1.6, -0.08, 2.56, 0.6, 1.3, -0.54, -0.98, 0.06, -0.23, 1.1)$, qui est obtenue après échantillonnage du filtre adapté.

La séquence $\mathbf{r}$ correspond à un message d'information de 3 bits. On suppose que le codeur débute et termine l'encodage par l'état "zéro" (toutes les cellules valant 0).

La séquence reçue $\mathbf{r}$ passe par un dispositif de quantification uniforme à 4 niveaux, et fournit la séquence quantifiée. Le fonctionnement du dispositif de quantification est représenté par la courbe suivante:



Quantification uniforme à 4 niveaux.

A l'issue de cette quantification, la séquence est utilisée par le décodeur, qui applique l'algorithme de Viterbi.

Les signaux mis en jeu sont les suivants:

- $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ où $m_4 = m_5$ pour terminer sur un état "zéro" (tail bits).
- $\mathbf{U} = \{u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(1)}, u_3^{(2)}, u_4^{(1)}, u_4^{(2)}, u_5^{(1)}, u_5^{(2)}\}$ correspondant aux bits codés.
- $\mathbf{s} = \{s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, s_2^{(1)}, s_2^{(2)}, s_3^{(1)}, s_3^{(2)}, s_4^{(1)}, s_4^{(2)}, s_5^{(1)}, s_5^{(2)}\}$ correspondant aux symboles modulés, valant +1 ou -1 selon que le bit codé vaut 1 ou 0 (respectivement).
- $\tilde{\mathbf{r}} = \{\tilde{r}_1^{(1)}, \tilde{r}_1^{(2)}, \tilde{r}_2^{(1)}, \tilde{r}_2^{(2)}, \tilde{r}_3^{(1)}, \tilde{r}_3^{(2)}, \tilde{r}_4^{(1)}, \tilde{r}_4^{(2)}, \tilde{r}_5^{(1)}, \tilde{r}_5^{(2)}\}$, valeurs quantifiées en entrée du décodeur convolutif.

1. Etablir le diagramme d'état et le treillis de ce codeur.
2. Déterminer les bits de soft-decision $\tilde{\mathbf{r}}$ en sortie du dispositif de quantification.
Appliquer l'algorithme de Viterbi pour retrouver le message d'information correspondant.

NB : On remarquera que le signal $\mathbf{r}$ est le signal d'entrée du dispositif de quantification, tandis que le signal $\tilde{\mathbf{r}}$ correspond au signal quantifié. **L'algorithme de Viterbi s'applique sur les valeurs quantifiées.**

Solution :

P7 - Modulations numériques.

On considère un système de transmission de données à un taux $R_B = 9600$ bits/seconde, et pour lequel la probabilité d'erreur bit ne doit pas excéder une valeur P_B^0 donnée, sur un canal gaussien additif (canal AWGN).

Déterminer la valeur limite du rapport signal-à-bruit E_B/N_0 , en dB, pour respecter la probabilité d'erreur P_B^0 , dans les cas suivants:

1. Modulation 8-PSK et $P_B^0 = 6 \times 10^{-5}$.
2. Modulation QPSK et $P_B^0 = 8 \times 10^{-4}$.

Dans chaque cas, préciser la largeur de bande correspondante.

Solution :

On utilise les expressions de probabilité d'erreur fournies en annexe :

$$P_B = \frac{1}{\log_2(M)} \times 2Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2(M) E_B}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right),$$

pour déterminer la valeur limite de la fonction $Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2(M) E_B}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$ en fonction de la probabilité d'erreur admise :

- (1) $P_B^0 \leq 6 \times 10^{-5}$ pour 8-PSK, soit $M=8$ donc

$$Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2(M) E_B}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \leq 3 \times 6 \times 10^{-5} / 2 = 9 \times 10^{-5}$$

On repère la valeur limite de E_B/N_0 sur le graphe (flèche noire).

On en déduit $E_B/N_0 = 3.8$ dB.

- (2) $P_B^0 \leq 8 \times 10^{-4}$ pour QPSK, soit $M=4$ donc

$$Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2(M) E_B}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \leq 2 \times 8 \times 10^{-4} / 2 = 8 \times 10^{-4}$$

On repère la valeur limite de E_B/N_0 sur le graphe (flèche verte).

On en déduit $E_B/N_0 = 3.1$ dB.

Pour chaque schéma de modulation, on écrit l'expression de la largeur de bande :

$$W_s = R_B / \log_2(M) \text{ pour } M\text{-PSK},$$

$$\text{Soit } W_s = \begin{cases} R_B / \log_2(4) = R_B / 2 \text{ pour QPSK} \\ R_B / \log_2(8) = R_B / 3 \text{ pour 8-PSK} \end{cases}$$

D'où les valeurs : (1) $W_s = 4800$ bits/seconde.

(3) $W_s = 3200$ bits/seconde.

